遠心力によって導くジャイロの新しい運動方程式

馬場豊治
大分綿機（ジャイロ技研 前身）

ジャイロの歳差運動時の質点の運動方向を解析し、遠心力の方向とジャイロの方向との交差によって生じる、遠心力による偶力のモーメントを求めるものである。

１．緒論

従来ジャイロの歳差運動は、

$$I\omega\Omega = WL$$

（I,ω,Ω,W,L は、慣性モーメント,スピン角速度、歳差角速度,ジャイロの重さ,回転軸の長さ）により説明されているが,Iω 一定の時 W,L を大きく,あるいは外力を与えΩを大きくすれば、IωΩの角運動量ベクトルは極限なく大きく働くことになり矛盾する。

本論文はジャイロの歳差運動時の質点の運動方向を解析し、遠心力の傾きによって生じる偶力、偶力によるモーメントによって

$$I\omega^2 \cdot \sin\theta = WL\sin\alpha$$

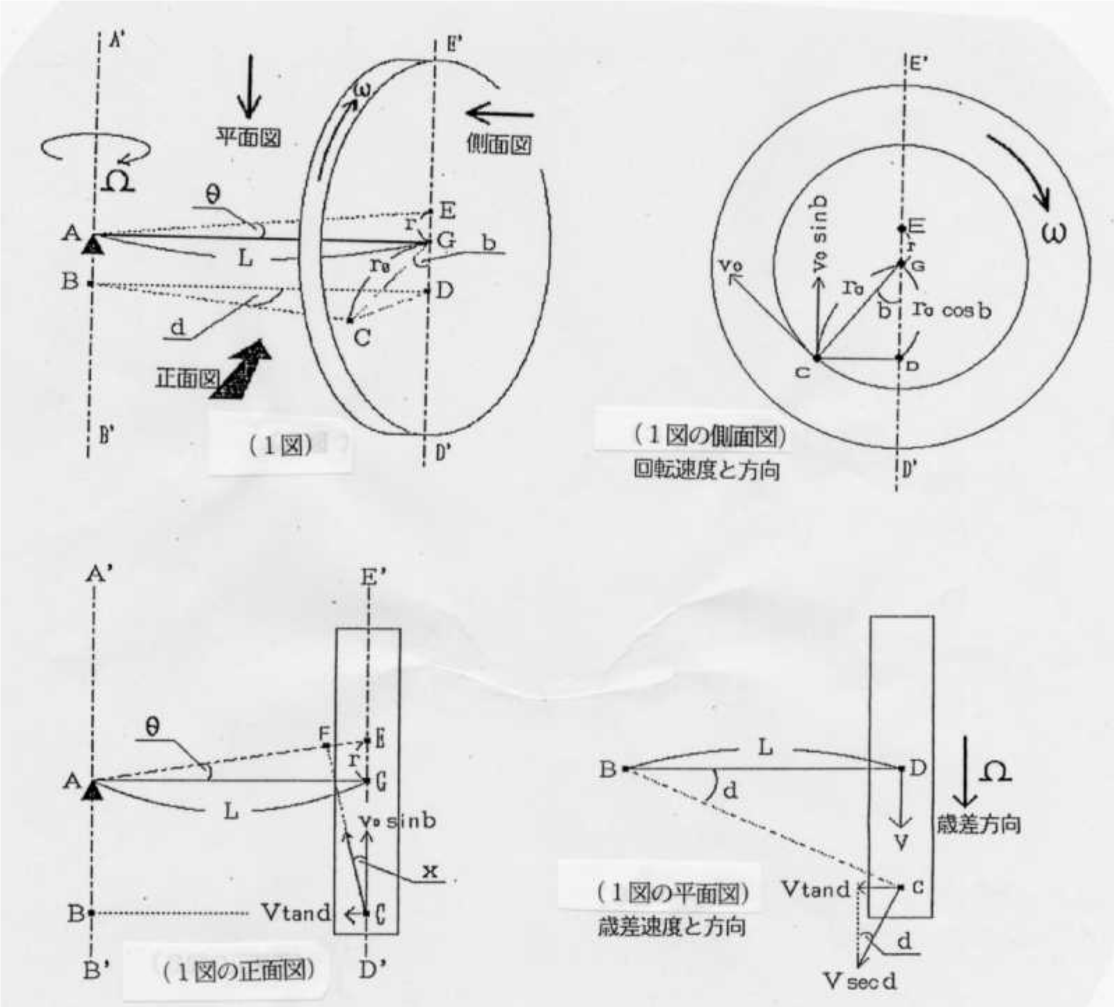
（但し、$\sin\theta = \Omega\sin\alpha / \sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2 + \omega^2}$、$\alpha$＝垂直に対する回転軸の傾斜角）なる式を導くものである。

２．本論

２.１ 歳差運動時の質点の運動方向

ジャイロが歳差運動をする時、角質点はジャイロの回転運動方向の接線と歳差運動方向の接線との合方向に働き、その接線は回転の瞬間中心軸に対し直角である。

証明：（図１）の E は回転の瞬間中心点、G は重心、A は回転軸の支点、線 AG は回転軸、点線 AE は回転の瞬間中心軸、角 BDC＝直角、角 A’AG＝直角、AB=GD、AG=BD、線 A’B’と E’D’は平行線、線 E’D’はジャイロの重心を通り回転軸に直角の中心線、歳差速度を V、ジャイロの角速度をω、半径 r_0 の質点の回転速度を V_0、偏差角（仮称：ジャイロの回転軸と回転の瞬間中心軸との交差角、角 EAG）をθ
回転の瞬間中心点 E と回転中心点 G との距離を r とした時



質点Cに関し

側面図のE’D’に平行の回転速度は　$V_0 \cdot \sin b$

平面図の歳差速度は　$V \sec d$

回転軸に平行の歳差速度は　$V \sec d \cdot \sin d = V \tan d$

正面図は　$V_0 \cdot \sin b$ と $V \tan d$ の合成図であり、角GCFをxとした時

$\tan x = V \tan d / V_0 \cdot \sin b$　　$V = r\omega$　　$V_0 = r_0 \cdot \omega$　より

$\tan x = r\omega \tan d / r_0 \cdot \omega \sin d = r \tan d / r_0 \cdot \sin b$

$r = L \tan \theta$　より　$\tan x = L \tan \theta \tan d / r_0 \cdot \sin b$

$L \tan d = r_0 \cdot \sin b$　故（1図　参照）　$\tan x = \tan \theta$

∴　質点の接線と回転の瞬間中心軸AEとの交差角は直角である。

2.2 慣性半径及び慣性質量の定義

半径 R の均質の円板の中心が固定軸に回転運動をしている時、慣性半径 r を

$$\pi R^2 - 2\pi r^2 = 0$$

$$r = \sqrt{R^2/2} \qquad \text{（定義１）}$$

均質の円板の質点の質量をdmとし、慣性質量Mを

$$M = \sum dm \qquad \text{（定義２）}$$

として定義する。

定義１、２、より遠心力の総和は $Mr\omega^2$ （ω＝角速度）

2.3 偏差モーメント（仮称）の発生

遠心力の方向は、回転の中心より質点の運動方向に働く。

歳差運動時の回転の瞬間中心軸と回転軸との偏差角（交差角）をθとする。

角質点はジャイロの回転方向に対しθの傾きで運動を行っている故、

遠心力（$Mr\omega^2$）による偶力（$Mr\omega^2 \cdot \sin\theta$）を生じる。

偶力に慣性半径 r を乗じた

$$Mr\omega^2 \sin\theta\, r = Mr^2\omega^2\sin\theta = I\omega^2\sin\theta \qquad (I = Mr^2)$$

が偏差モーメントでありその方向は、回転の瞬間中心軸は回転軸の直上に生じる故、

支点に対し反重力方向（負の方向）である。

2.4 従来式との関係

ジャイロの回転中心点と回転の瞬間中心点の距離を r_θ、その他（ω、L、α、Ω、θ、I）は、前記とした時、

歳差速度　$r_\theta \omega = L\sin\alpha\,\Omega$　より　$r_\theta = L\sin\alpha\,\Omega/\omega$

$$\therefore \tan\theta = r_\theta/L = \Omega\sin\alpha/\omega \quad \text{故}$$

$$\sin\theta = \Omega\sin\alpha/\sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\cos\theta = \omega/\sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore I\omega^2\sin\theta &= I\omega^2\Omega\sin\alpha/\sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2+\omega^2} \\ &= I\omega\Omega\sin\alpha\cdot\omega/\sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2+\omega^2} \\ &= I\omega\Omega\cos\theta\cdot\sin\alpha\end{aligned}$$

長さ L の回転軸に、重力 W のジャイロが垂直に対し角αの傾きで歳差運動をする時、

重力にとって WLsinα のモーメントが支点でジャイロに対し重力方向（正の方向）へと働く。

このモーメントと偏差モーメントが等しいとした時、両辺を sinαで割ると

$$I\omega\Omega\cos\theta = WL$$

ジャイロが歳差運動をする時、各質点は回転の瞬間中心軸に対し直角に円運動している故、

Iωの角運動量は回転の瞬間中心軸回りの角運動量と考えることが出来る。

偏差角をθとした時、ジャイロの回転軸回りの角運動量はIω・cosθである。

故に、ジャイロの回転軸回りの角運動量ベクトル（偏差モーメント）は IωΩcosθであり、

従来の角運動量によって導く計算式は、本稿遠心力で導く計算式と一致し

$$I\omega^2\cdot\sin\theta = WL\sin\alpha$$

をジャイロの運動方程式と考える事が出来る。

2.5 偏差モーメントの極限

$$\sin\theta = \Omega\sin\alpha / \sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2+\omega^2} \qquad (\alpha \neq 0)$$
$$\therefore \lim_{\Omega\to\infty} I\omega^2\sin\theta = I\omega^2$$

2.6 歳差角速度Ωと歳差運動条件

$$\cos\theta = \omega / \sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2+\omega^2} \qquad (\alpha \neq 0)$$
$$\therefore I\omega\Omega\cdot\cos\theta = I\omega^2\Omega / \sqrt{(\Omega\sin\alpha)^2+\omega^2} = WL$$

両辺を二乗し　$(I^2\omega^4 - W^2L^2\sin^2\alpha)\Omega^2 - W^2L^2\omega^2 = 0$　より

$$\Omega = WL / I\omega\cos\theta$$
$$= \sqrt{4(I^2\omega^4 - W^2L^2\sin^2\alpha)W^2L^2\omega^2} / 2(I^2\omega^4 - W^2L^2\sin^2\alpha)$$

歳差運動条件は、上式より　$I\omega^2 > WL\sin\alpha$

3 結論

ジャイロの歳差運動方程式は、

$$I\omega^2\cdot\sin\theta = WL\sin\alpha$$

である。

回転するジャイロの方向を変えると、回転の瞬間中心軸とジャイロの回転中心軸とが交差する。この交差角（偏差角）により偏差モーメントを生じる。

遠心力は回転の瞬間中心軸に直角方向に働く故、偏差モーメントは力をかけた方向より９０度の位相を生じる。

回転するジャイロが支点を支えに歳差運動を続けるのは、
ジャイロ等の重さによる静力学的に働くモーメントが、位相により歳差方向のモーメントとなって歳差運動が起こり、歳差運動によって偏差モーメントが働き、
負の方向の偏差モーメントと、重力によって支点に働く正の方向のモーメントとの釣り合いがとれ、歳差運動を続けていると考える。

偏差モーメントは偏差角を小さくする方向に働く故、ジャイロ剛性は偏差モーメントの働きと考える。

回転するジャイロの運動特性は、偏差モーメントによるものと考えられる。

参考文献

馬場豊治：「遠心力によって導くジャイロの新しい運動方程式について」
第 29 期 日本航空宇宙学会年会講演会講演集,1998,pp.182-183

論文の内容等 質問は、著者に直メールして下さい

アドレス　t-baba@gyrogiken.jp